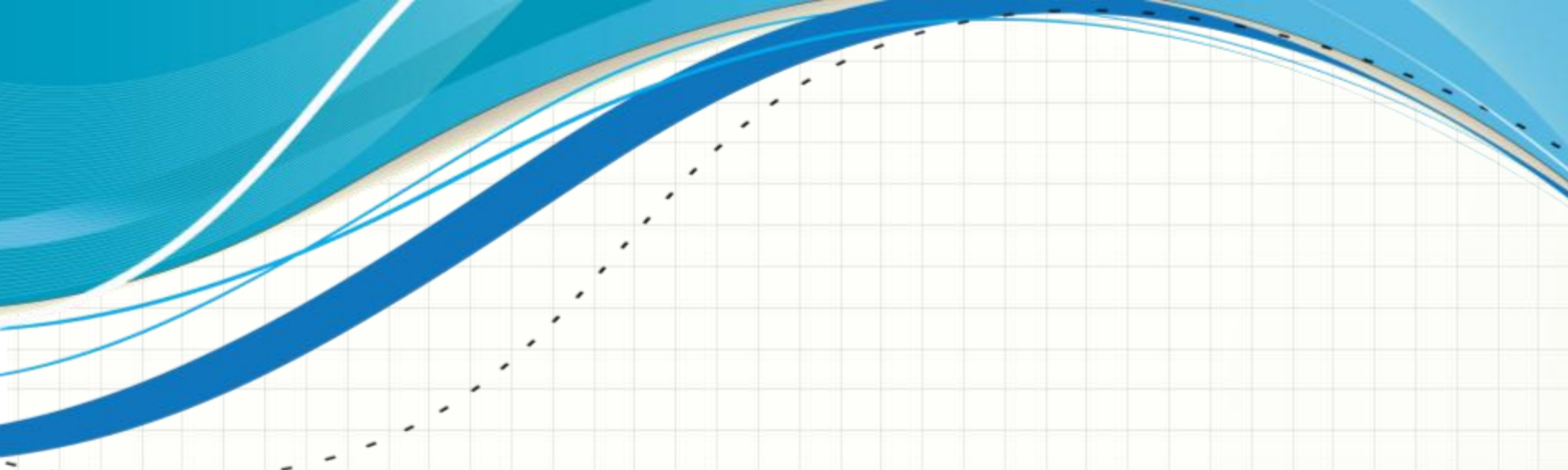




مقدمه‌ای بر درونیابی

Introduction to
Interpolation

معرفی درونیابی

- درونیابی (Interpolation) به معنی یافتن تابعی که از نقاط مشخص و معلومی عبور کند.
- اگر مقدار یک تابع فقط در تعدادی نقطه مشخص باشد، آن گاه با درونیابی می توان مقدار تابع در نقاط دیگر را نیز تقریب زد.
- درونیابی انواع متفاوتی دارد. از جمله
 - درونیابی چند جمله ای (Polynomial Interpolation)
 - درونیابی اسپلاینی (Spline Interpolation)
 - درونیابی نزدیک ترین همسایگی (nearest)
 - درونیابی دو خطی (Bilinear Interpolation)
 - درونیابی دو مکعبی (Bicubic Interpolation)

در اینجا درونیابی توابع دو متغیره مدنظر می باشد. یعنی یک تابع دو متغیره $f(x,y)$ داریم که در چند نقطه $(x_i, y_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ مقدار آن را می دانیم و می خواهیم مقدار تابع را در نقاط دیگر به دست آوریم.

معرفی درونیابی

- در پردازش تصویر بیشتر از
 - درونیابی نزدیکترین همسایگی،
 - درونیابی دوخطی و
 - درونیابی دومکعبی
- استفاده می شود.
- این نوع درونیابی ها برای داده های دوبعدی استفاده می شوند.
- در این نوع درونیابی ها مقدار تابع در یک **مش منظم (Regular Mesh)** مشخص است و می خواهیم مقدار تابع در برخی نقاط واقع در بین مش ها را تقریب بزنیم.

درونیابی-مثال

به عنوان مثال فرض کنید که مقدار تابع $f(x,y)$ به صورت زیر در برخی نقاط مشخص و داده شده است.

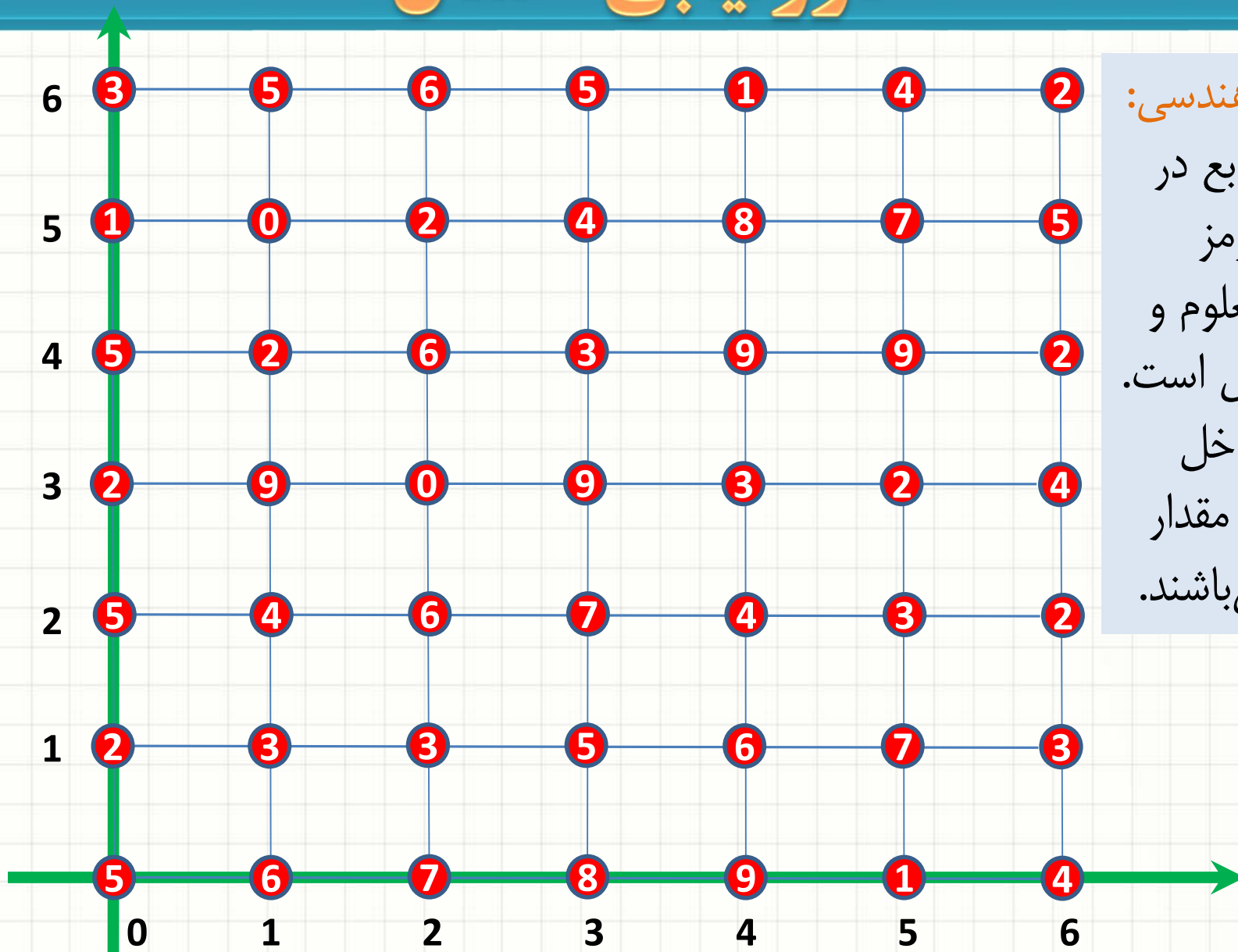
$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3	4	5	6
0	3	5	6	5	1	4	2
1	1	0	2	4	8	7	5
2	5	2	6	3	9	9	2
3	2	9	0	5	3	2	4
4	5	4	6	7	4	3	2
5	2	3	3	5	6	7	3
6	5	6	7	8	9	1	5

مقدار تابع f به ازای
 $x = 1$ و $y = 3$
 برابر 4 است. یعنی
 $f(1,3) = 4$

مقدار تابع f به ازای
 $x = 4$ و $y = 5$
 برابر 3 است. یعنی
 $f(4,5) = 3$

حال می‌خواهیم مقدار تابع f را در نقاط دیگر مثلاً نقطه $(0.4, 5.5)$ و ... به دست آوریم.

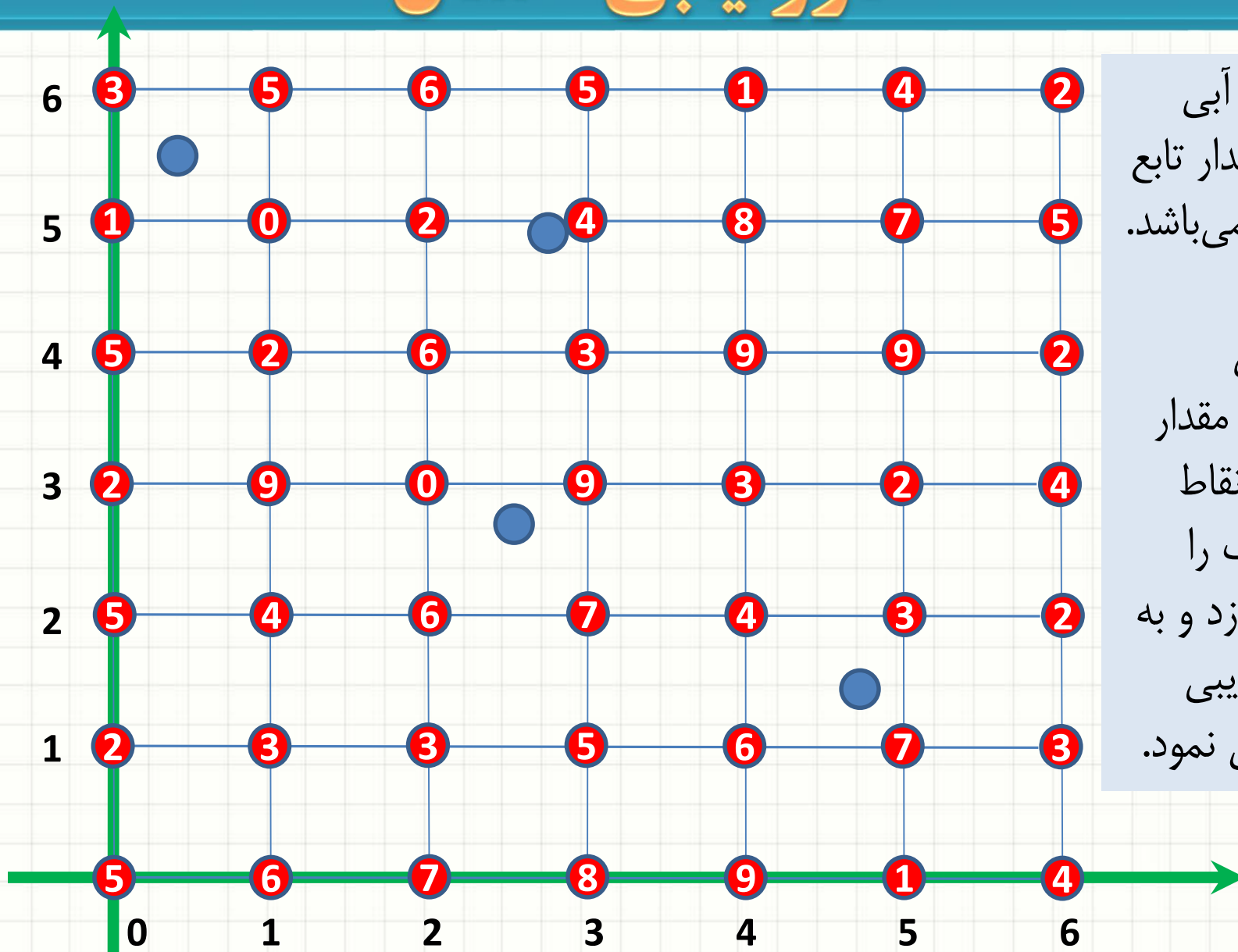
درونیابی-مثال



تجسم هندسی:

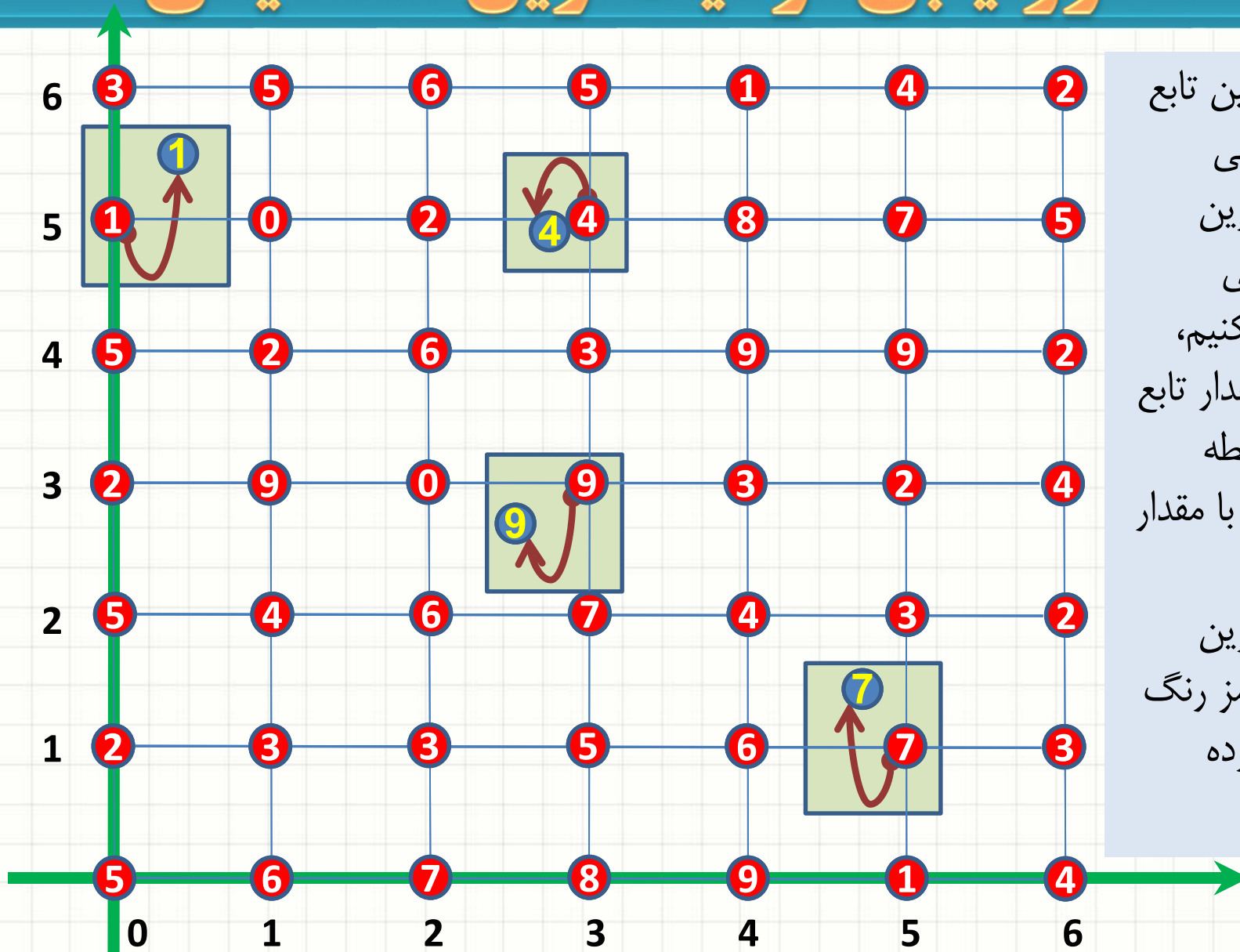
مقدار تابع در
نقاط قرمز
رنگ معلوم و
مشخص است.
اعداد داخل
دایره‌ها مقدار
تابع می‌باشند.

درونیابی-مثال



در نقاط آبی
رنگ مقدار تابع
معلوم نمی باشد.
با کمک
درونیابی
می توان مقدار
تابع در نقاط
آبی رنگ را
تخمین زد و به
طور تقریبی
مشخص نمود.

درونیابی نزدیکترین همسایگی



اگر تخمین تابع
از درونیابی
نزدیکترین
همسایگی
استفاده کنیم،
آن گاه مقدار تابع
در هر نقطه
آبی رنگ با مقدار
تابع در
نزدیکترین
نقطه قرمز رنگ
تخمین زده
می شود.

درونیابی نزدیکترین همسایگی

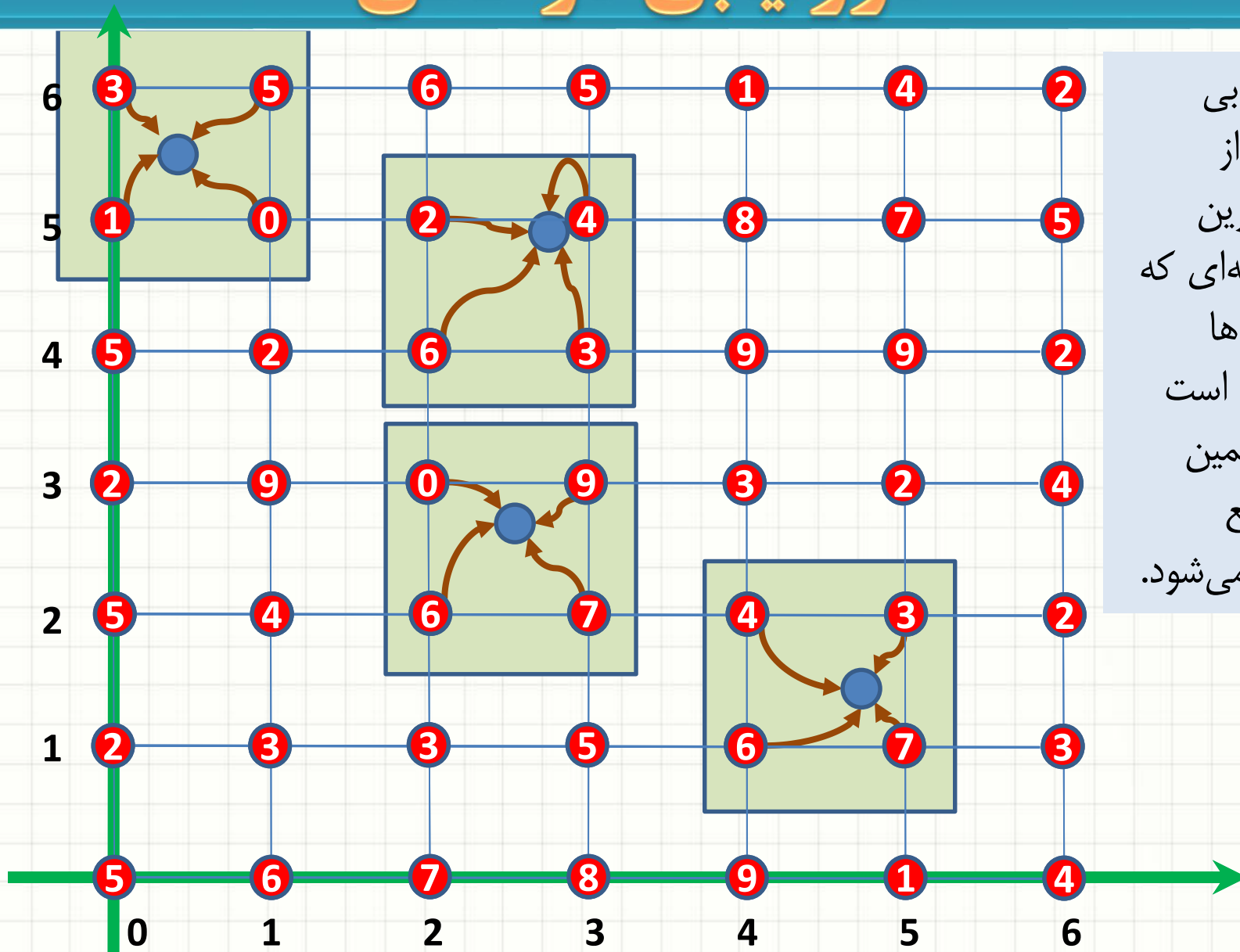
جمع‌بندی:

در درونیابی نزدیکترین همسایگی، اگر مقدار تابع f در نقاط مش منظم $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

داده شده باشد و بخواهیم مقدار f را در نقطه (p, q) به دست آوریم، آن گاه

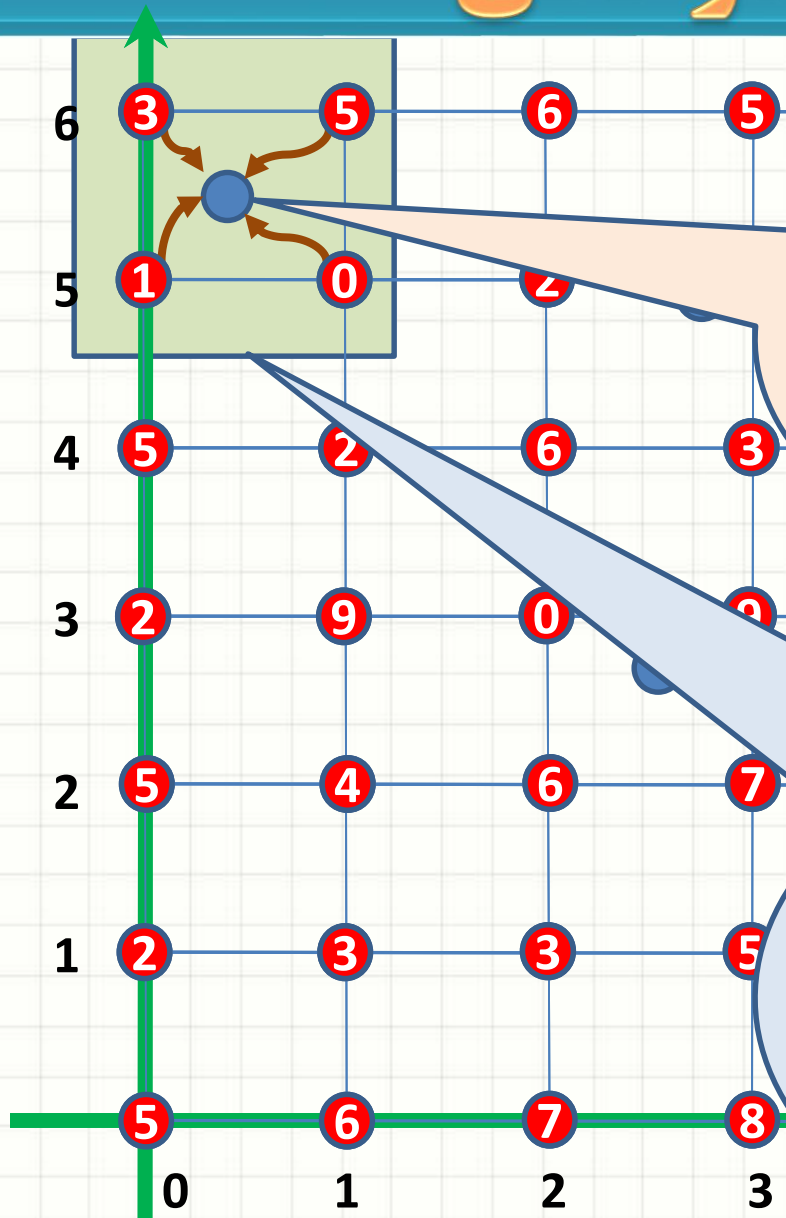
- در ابتدا باید مشخص کنیم که این نقطه در بین کدام چهار نقطه مش قرار می‌گیرد
- سپس مشخص کنیم که به کدامیک از این چهار نقطه نزدیک‌تر است
- در نهایت مقدار تابع در نزدیک‌ترین نقطه را به عنوان مقدار تقریبی تابع در (p, q) معرفی می‌کنیم.

درونیابی دوخطی



در درونیابی
دوخطی از
نزدیک‌ترین
چهار نقطه‌ای که
مقدار آن‌ها
مشخص است
برای تخمین
مقدار تابع
استفاده می‌شود.

درونیابی دوخطی



مختصات این نقطه

$(0.4, 5.5)$

است و می‌خواهیم مقدار این
نقطه را با استفاده از درونیابی
دوخطی تقریب بزنیم.

در درونیابی دوخطی از چهار
نزدیک‌ترین نقطه استفاده می‌شود.

این نقاط عبارتند از

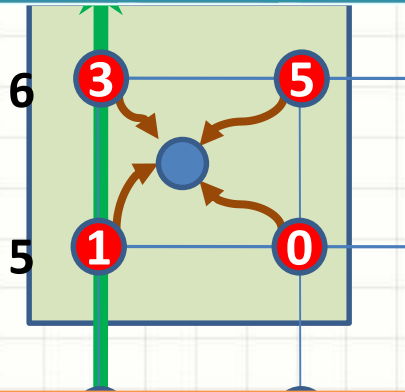
نقطه $(0, 5)$ با مقدار 1

نقطه $(0, 6)$ با مقدار 3

نقطه $(1, 5)$ با مقدار 0

نقطه $(1, 6)$ با مقدار 5

انجام درونیابی دوخطی



در درونیابی دوخطی تابع درونیاب به صورت زیر فرض می شود

$$F(x, y) = ax + by + cxy + d$$

حال ضرایب از حل دستگاه زیر به دست می آیند

$$\begin{cases} f(0, 5) = 1 \\ f(0, 6) = 3 \\ f(1, 5) = 0 \\ f(1, 6) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0a + 5b + 0c + d = 1 \\ 0a + 6b + 0c + d = 3 \\ 1a + 5b + 5c + d = 0 \\ 1a + 6b + 6c + d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -9 \end{cases}$$

لذا تابع درونیاب به صورت زیر است

$$F(x, y) = -16x + 2y + 3xy - 9$$

حال مقدار تابع درونیاب در نقطه مورد نظر (0.4, 5.5) عبارت است از:

$$F(0.4, 5.5) = -16(0.4) + 2(5.5) + 3(0.4)(5.5) - 9 = 2.2$$

درونیابی دوخطی

جمع‌بندی:

در درونیابی دوخطی، اگر مقدار تابع f در نقاط مش منظم

$$(x_i, y_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

داده شده باشد و بخواهیم مقدار f را در نقطه (p, q) به دست آوریم، آن‌گاه در ابتدا باید مشخص کنیم که این نقطه در بین کدام چهار نقطه مش قرار می‌گیرد و سپس با توجه به مقدار تابع در این چهار نقطه مقدار تابع در نقطه (p, q) را تقریب می‌زنیم. در این درونیابی، تابع درونیاب به صورت دوخطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

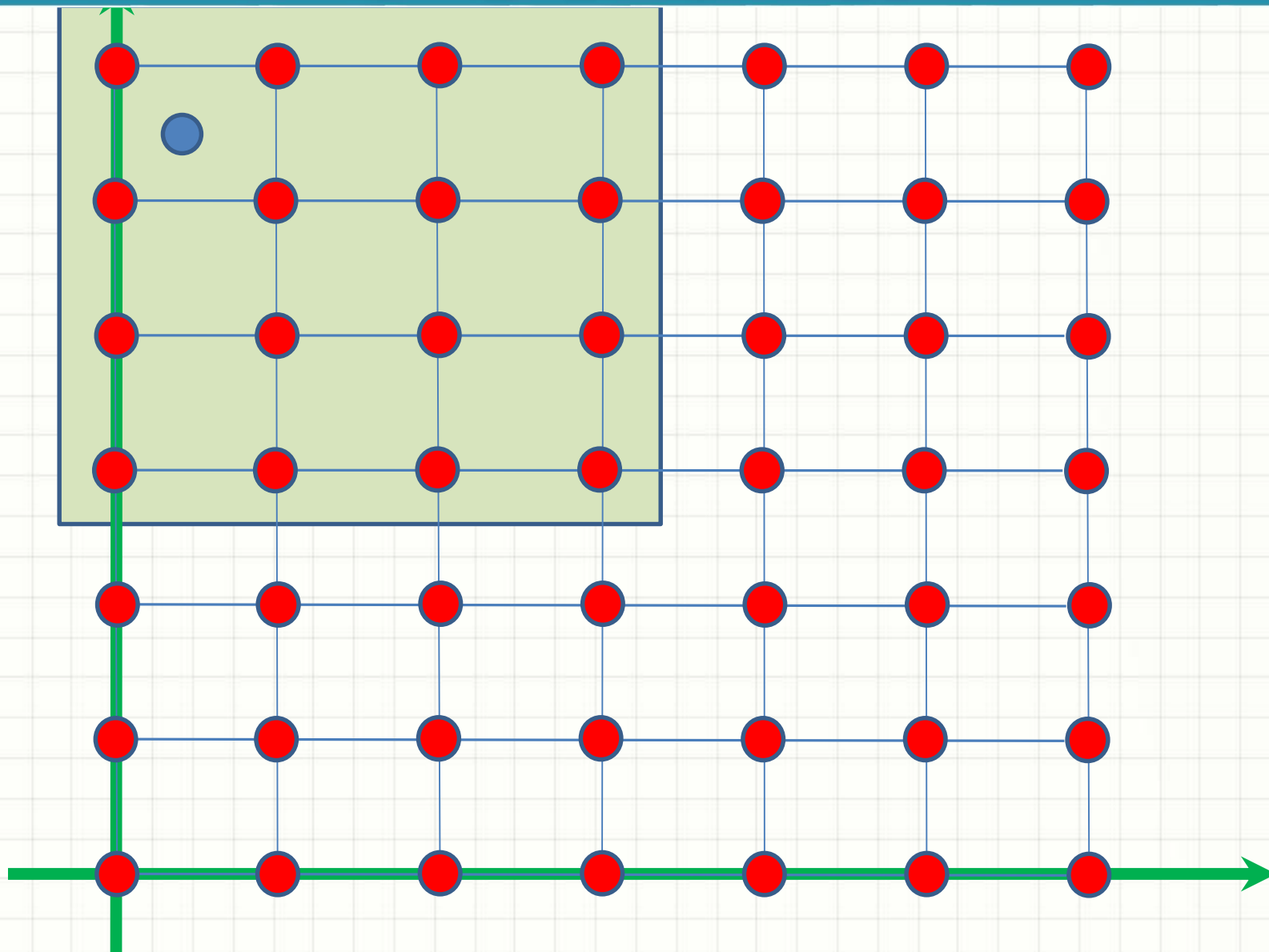
$$F(x, y) = ax + by + cxy + d$$

درونیابی دومربعی

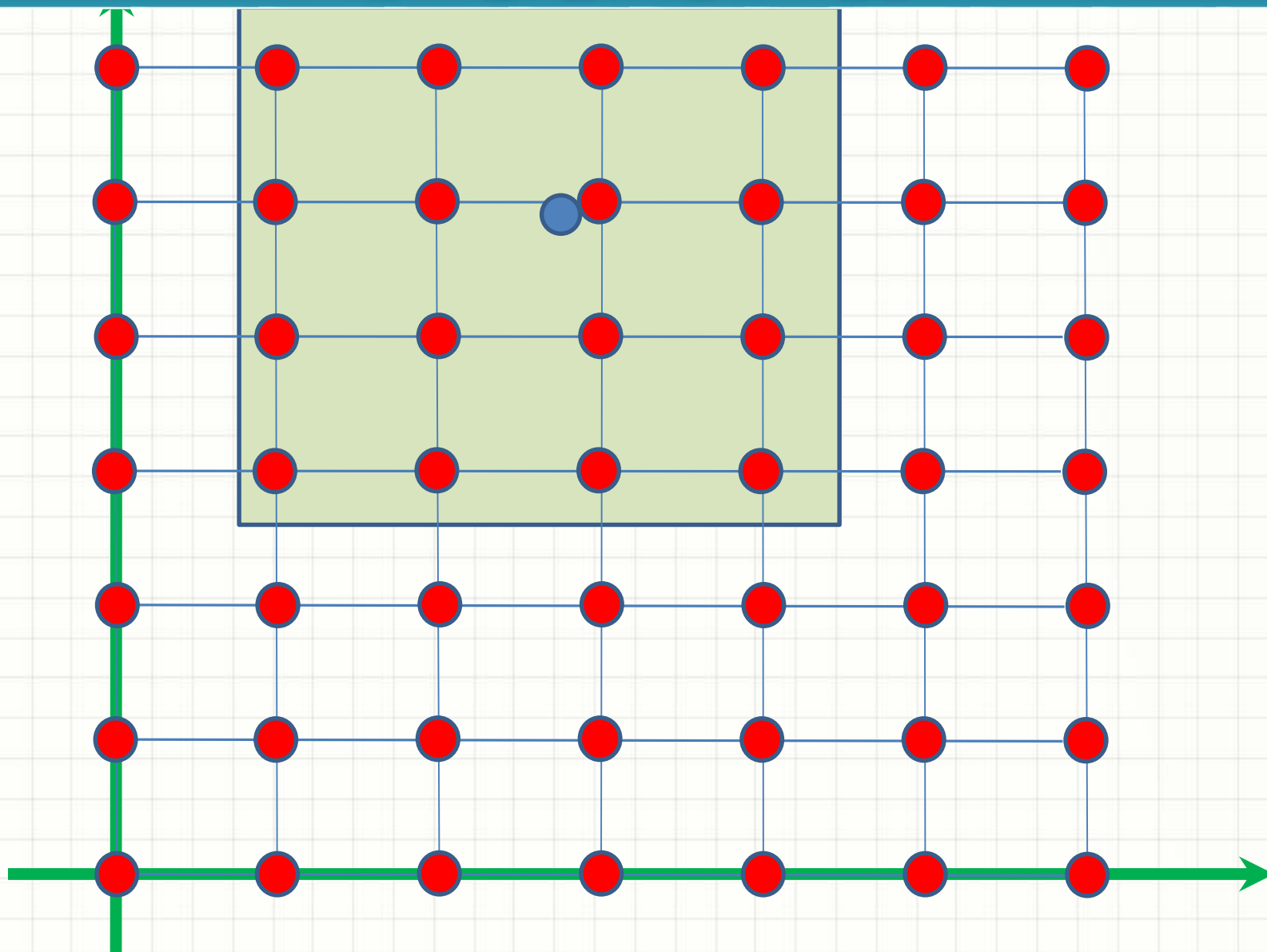
- درونیابی دومربعی (Bi-Cubic) همانند درونیابی دوخطی است، با این تفاوت که به جای استفاده از چهار **نقطه همسایگی** از **شانزده** نقطه همسایگی استفاده می‌کند.
- در این درونیابی، تابع درونیاب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$$

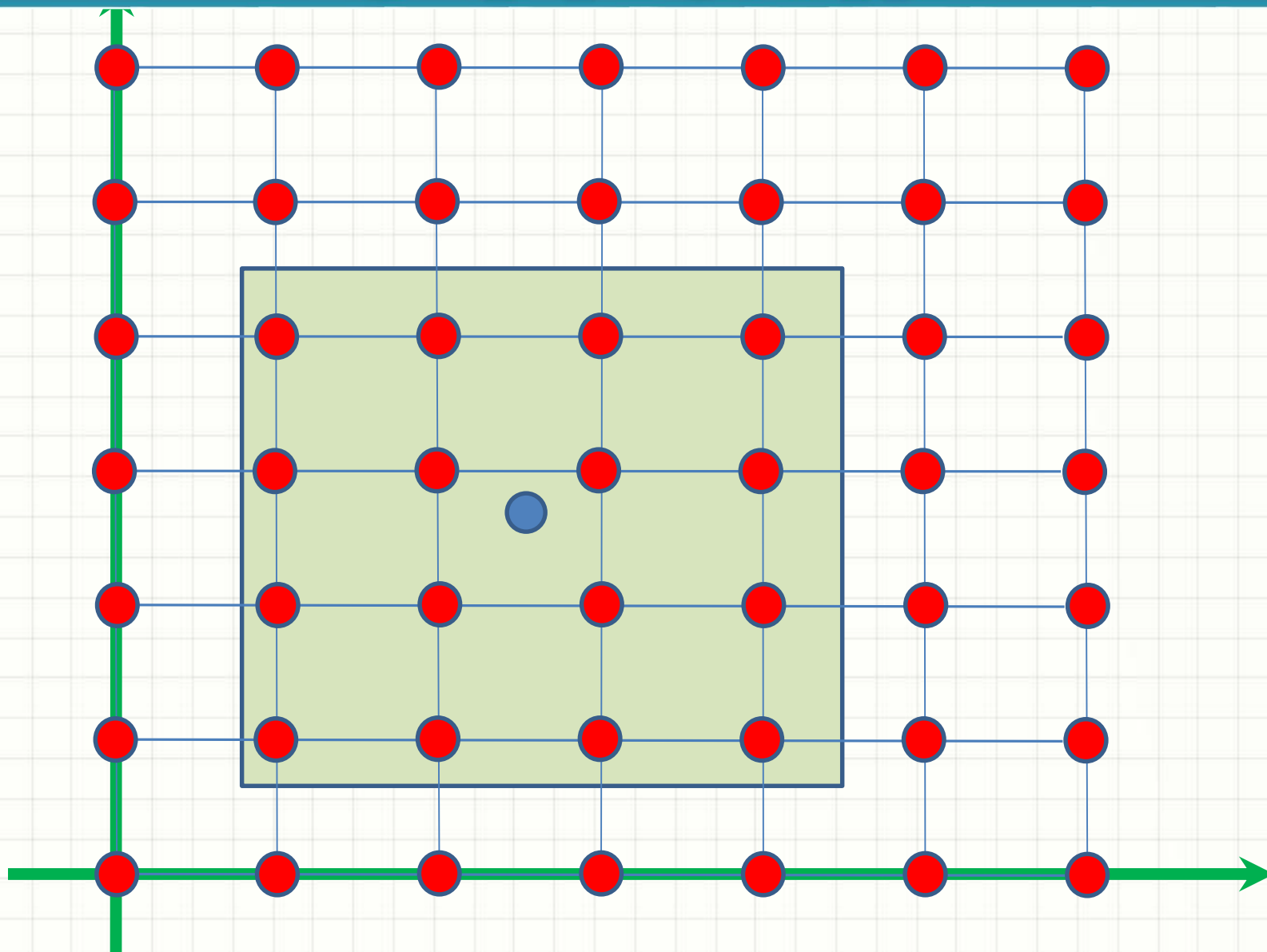
درون‌یابی دو مربعی



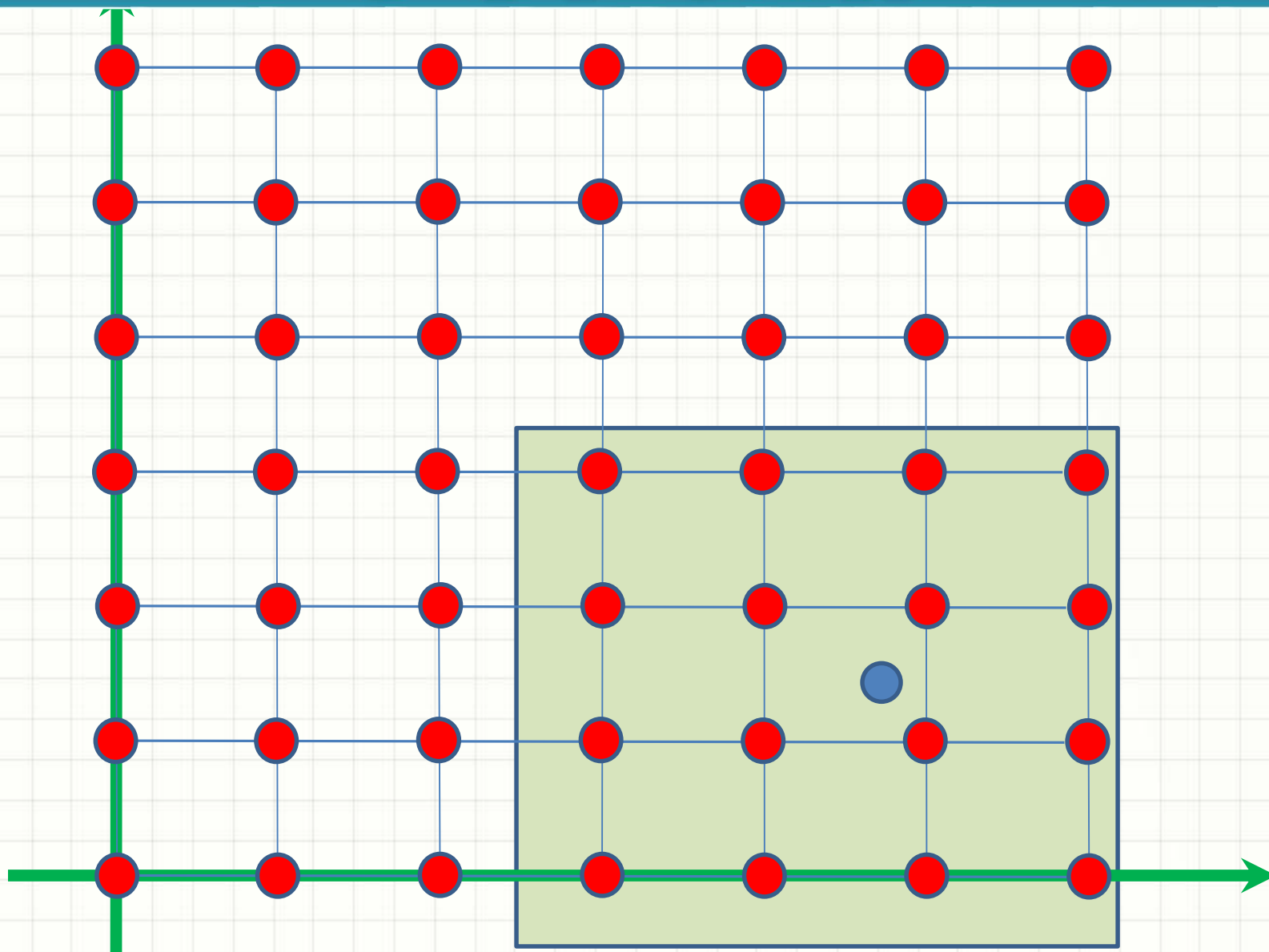
درون‌یابی دو مربعی



درون‌یابی دو مربعی

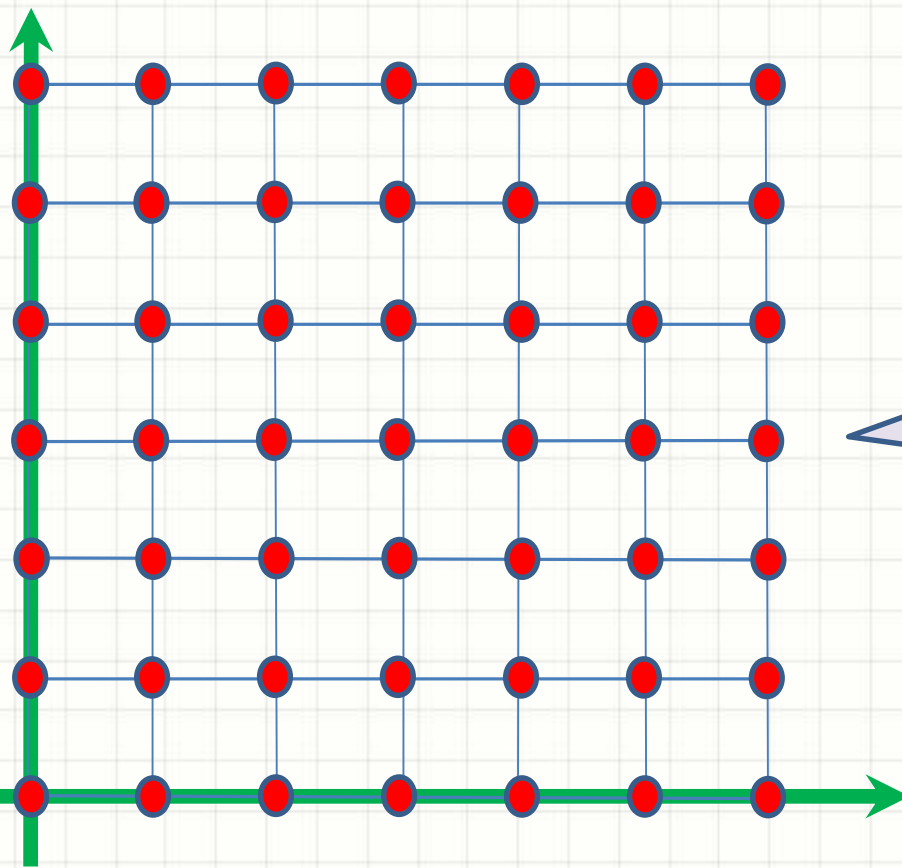


درونیابی دومربعی



درونیابی مبتنی بر مش نامنظم

در درونیابی‌های گفته شده در قبل فرض کردیم که مقدار تابع در یک مش منظم مستطیلی مشخص است. با این فرض بحث درونیابی پیش رفت.

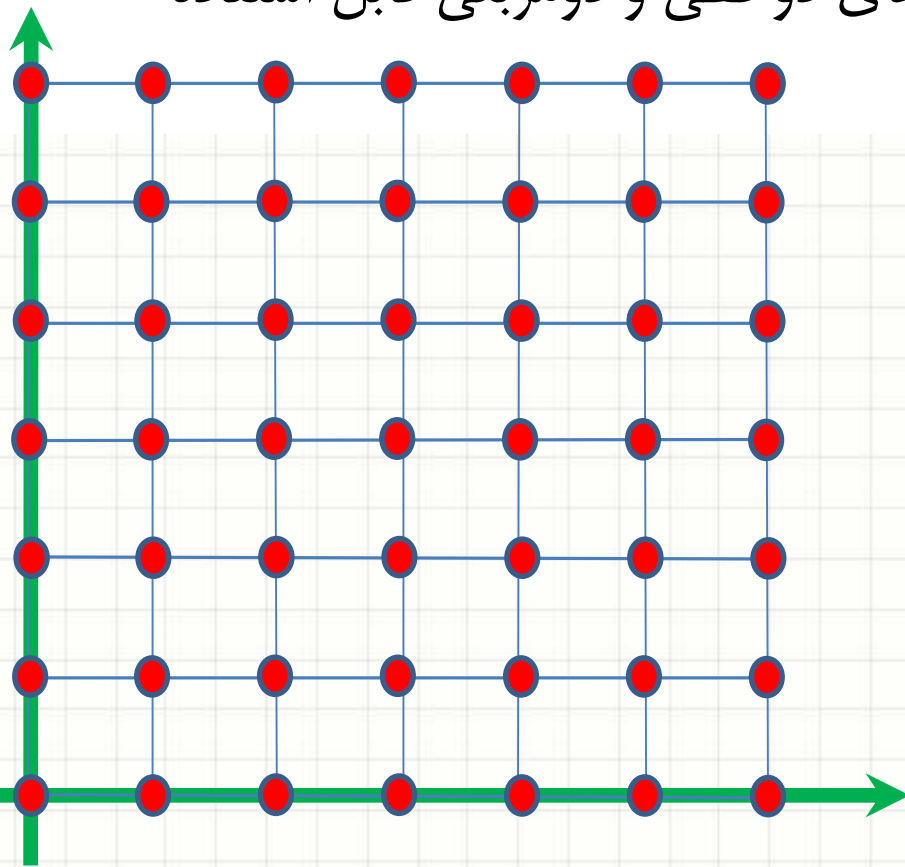


در مش منظم نقاطی که مقدار تابع در آن‌ها معلوم است به صورت یک صف منظم می‌باشند

درونیابی مبتنی بر مش نامنظم

در درونیابی‌های گفته شده در قبل فرض کردیم که مقدار تابع در یک مش منظم مستطیلی مشخص است. با این فرض بحث درونیابی پیش رفت.

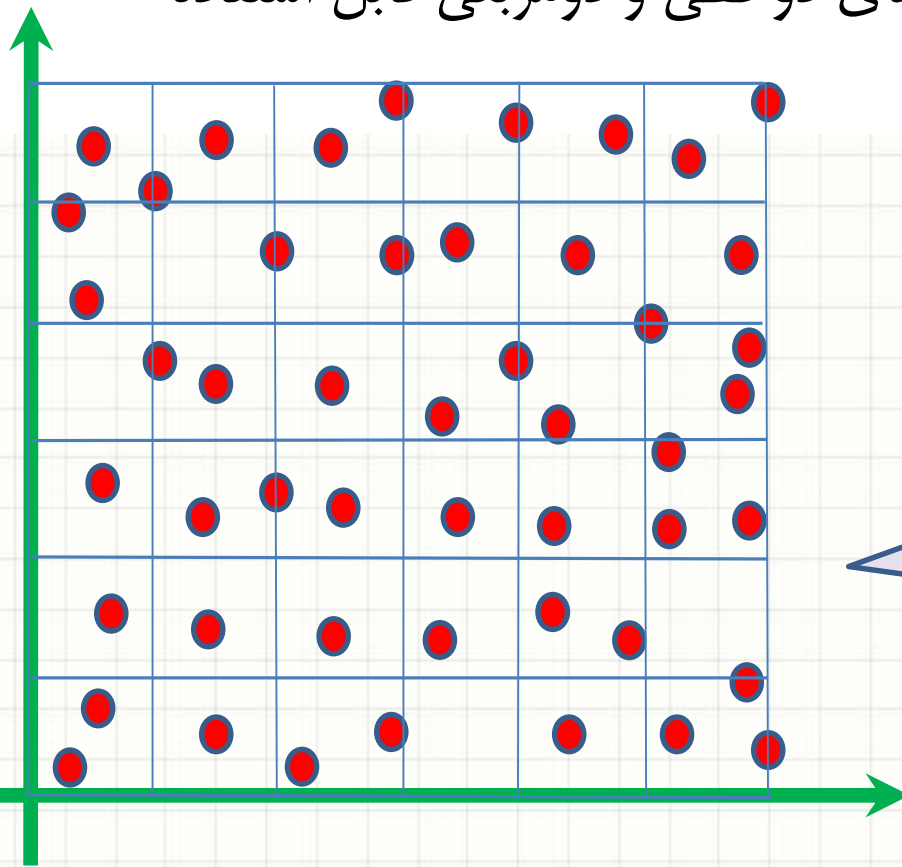
اما سوالی که مطرح است آن است که اگر مقدار تابع در نقاطی مشخص باشد که تشکیل یک مش منظم ندهند، آیا باز هم درونیابی‌های دوخطی و دومربعی قابل استفاده می‌باشند؟



درونیابی مبتنی بر مش نامنظم

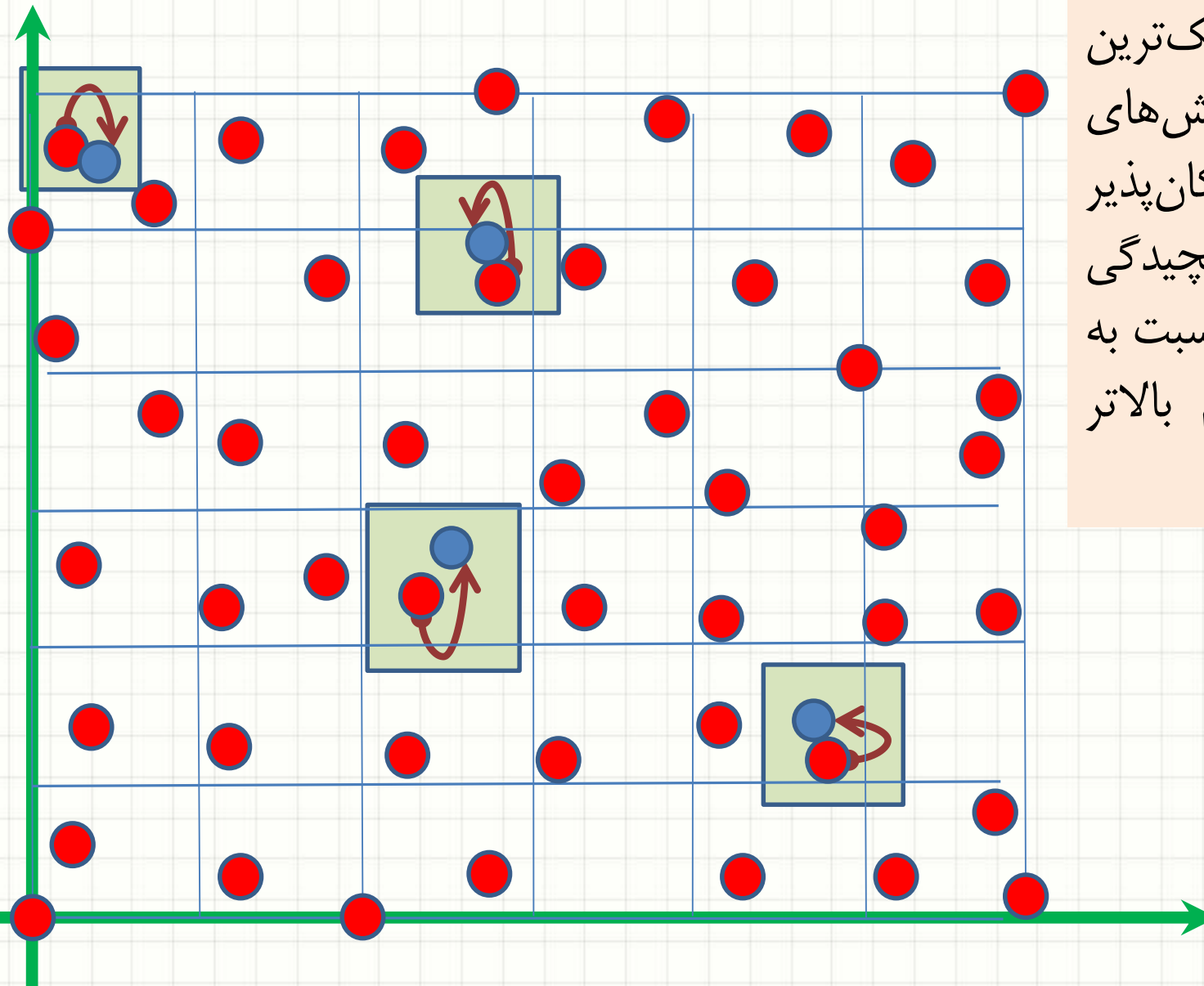
در درونیابی‌های گفته شده در قبل فرض کردیم که مقدار تابع در یک مش منظم مستطیلی مشخص است. با این فرض بحث درونیابی پیش رفت.

اما سوالی که مطرح است آن است که اگر مقدار تابع در نقاطی مشخص باشد که تشکیل یک مش منظم ندهند، آیا باز هم درونیابی‌های دوخطی و دومربعی قابل استفاده می‌باشند؟



در مش نامنظم نقاطی که مقدار تابع در آن‌ها معلوم است به صورت پراکنده‌اند و نظم خاصی ندارند

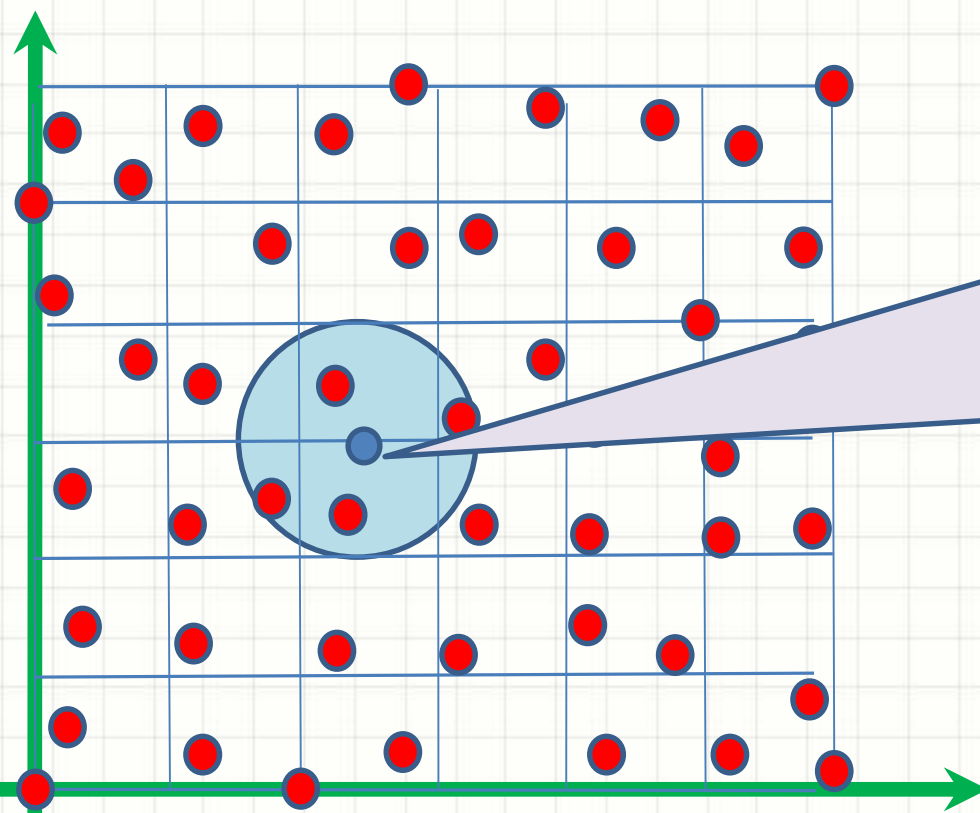
درونیابی نزدیکترین همسایگی در مش نامنظم



درونیابی نزدیکترین همسایگی در مش‌های نامنظم امکان‌پذیر است، البته پیچیدگی محاسباتی آن نسبت به مش‌های منظم بالاتر می‌باشد.

درونیابی دوخطی و دو مکعبی در مش نامنظم

در مش‌های نامنظم وجود و یکتایی درونیاب دوخطی و یا دو مربعی برقرار نمی‌باشد. به این معنی که ممکن است دستگاه‌های مربوطه دارای جواب نباشند و یا بی‌نهایت جواب داشته باشد. علاوه بر آن یافتن **نقاط همسایگی** در مش‌های نامنظم بسیار پیچیده‌تر می‌شود.



تضمینی وجود ندارد که بتوان مقدار تابع در نقطه آبی‌رنگ را بر حسب مقدار تابع در چهار نقطه اطرافش به روش درونیابی دوخطی به دست آورد.

عدم استفاده از درونیابی مبتنی بر مش نامنظم

- به دلایل فوق معمولاً از درونیابی مبتنی بر مش‌های نامنظم اجتناب می‌شود.

- البته نوع دیگری از درونیابی موسوم به

درونیابی توابع پایه شعاعی (Radial Basis Function)

وجود دارد که به برای درونیابی مبتنی بر مش‌های نامنظم مناسب می‌باشد.

مقایسه بین درونیابی‌ها

درونیابی نزدیک‌ترین همسایگی از دو درونیابی دیگر ساده‌تر است و پیچیدگی محاسباتی آن پایین‌تر است. همچنین برای مش‌های نامنظم نیز قابل اعمال است. لذا به لحاظ سادگی و حجم محاسبات درونیابی نزدیک‌ترین همسایگی در رتبه اول قرار دارد.

همین‌طور واضح است که درونیابی دوخطی دارای محاسبات کمتری نسبت به درونیابی دومربعی می‌باشد. در درونیابی دوخطی یک دستگاه چهارتایی حل می‌شود و در درونیابی دومربعی یک دستگاه شانزده‌تایی. لذا حجم محاسبات در درونیابی دومربعی نسبت به درونیابی دوخطی چشمگیر می‌باشد.

درونیابی یک نوع تقریب است و درونیابی‌های متفاوت منجر به نتایج متفاوت می‌گردد. در بین سه درونیابی گفته شده در فوق، درونیابی دومربعی منجر به نتایج دقیق‌تر می‌شود و درونیابی دوخطی نیز از درونیابی نزدیک‌ترین همسایگی دقیق‌تر است.

اگر به دنبال تعادل بین دقت و حجم محاسبات باشیم، آن‌گاه درونیابی دوخطی از بقیه مناسب‌تر است. به همین لحاظ این نوع درونیابی در عمل بیشتر از دو درونیابی دیگر استفاده می‌شود.

مقایسه بین درونیابی‌ها

